АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ПРЕПРИНТ

А.М. МОЛЧАНОВ

ГИПОТЕЗА РЕЗОНАНСНОЙ СТРУКТУРЫ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

ПУЩИНО
1974

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ ЦЕНТР БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

ПРЕПРИНТ

А.М. МОЛЧАНОВ

ГИПОТЕЗА РЕЗОНАНСНОЙ СТРУКТУРЫ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

ПУЩИНО
1974

УДК 523.25

В статье изложена история изучения резонансных движений и современное состояние вопроса. Сформулировано предположение о решающей роли "исчезающих" диссипативных факторов в формировании резонансных структур. Приведены общие соображения о значении резонансных явлений в естествознании.

ВВЕДЕНИЕ. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Небесная механика стала количественной, математической наукой после формулировки Ньютоном закона всемирного тяготения (1687). Движение планет Солнечной системы определяется (в главном члене) полем тяготения Солнца, основного, резко доминирующего тела системы. С точки зрения теории колебаний планетная система состоит из одночастотных колебательных подсистем, почти независимых, слабо связанных друг с другом. Необходимо подчеркнуть, что распадение на колебательные подсистемы существенно отличается от распадения на физические тела – планеты. Каждая колебательная подсистема состоит из пары физических тел – Солнца и планеты. Таким образом, в сложной колебательной системе – планетной – Солнце повторено девятикратно (по числу планет).

а. Большое вековое возмущение – резонанс Юпитера и Сатурна

Ньютон (1687) /1/ объяснил кеплеровы (1609) эллипсы и разобрал кометные гиперболы. Учет следующего, малого члена – взаимодействия планет – был осуществлен Лагранжем и Лапласом (1776) в форме теории возмущений /Tisserand, 1866/ /2/. Сам Ньютон считал, что взаимные возмущения планет приводят Солнечную систему в беспорядок и только божественное вмешательство сохраняет стройную картину мироздания.

Резонансные явления появляются уже на этом этапе в роли пособников дьявола. Драматическая ситуация, причиной которой явилась почти соизмеримость периодов Юпитера и Сатурна, сочувственно описана Субботиным (1937) /3/: "Большое неравенство в движении Юпитера и Сатурна, зависящее от делителя $2\omega_{♄} - 5\omega_{♃}$, было открыто эмпирически. Эйлер и Лагранж, после ряда безуспешных попыток объяснить его, стали склоняться к мнению, что это неравенство указывает на действие какой-то силы, отличной от притяжения Солнца и известных планет. Истинная причина была открыта в 1784 г., когда Лаплас предпринял вычисление всех неравенств первого порядка в движении Юпитера и Сатурна до третьей степени включительно".

б. Троянцы. Резонанс 1:1 (унисон)

Существует очень немного точных решений задачи трех тел. Одно из них – треугольник Лагранжа (1772) – является резонансным движением. Наблюдение опоздало более чем на сто лет по сравнению с теорией. Только в 1904 г. Вольф открыл (применив стереоскоп) первый астероид, образующий вместе с Юпитером и Солнцем равносторонний лагранжев треугольник. В настоящее время известно более дюжины /Путилин, 1953/ /4,5/ астероидов-троянцев. Астероиды, названные именами греческих героев, предшествуют Юпитеру. В эту группу, впрочем, попал (видимо, в качестве пленника) Гектор (№ 624). Побежденные троянцы замыкают это торжественное шествие во славу науки.

в. Пояс астероидов. Пробелы Кирквуда

Большую серию резонансных движений, воспринимаемых опять-таки как досадные помехи /Ватсон, 1947/ /6/ в стройной теории, доставляет пояс астероидов. Хорошо известны /Уиппл, 1948/ /7/ пробелы Кирквуда, соответствующие резонансам 1:2, 2:5, 1:3 с обращением Юпитера. Менее заметные понижения в кривой распределения периодов обращения астероидов возникают при резонансах 1:4, 1:5, 3:5, 3:7.

Существует и противоположная ситуация – группировка орбит вблизи точек 3:4 и 2:3. В музыкальной терминологии это – "кварта" и "квинта". "Прима" также устойчива и соответствует группе троянцев.

г. Кольца Сатурна

Знаменитая "щель Кассини" (1680) имеет резонансную природу. Она занимает ту зону, в которой частички, составляющие кольца Сатурна, имели бы периоды, близкие к 1/2 периода Мимаса, 1/3 периода Энцелада и 1/4 периода Тефии. Для понимания этого явления недостаточно было обнаружить щель и открыть спутники Сатурна. С этим справился сам Кассини. Мало было даже открыть другие пробелы в кольцах Сатурна. Только в XIX веке Кирквуд (1850), сопоставив пробелы в поясе астероидов с кольцами Сатурна, осознал единый резонансный механизм образования пробелов.

д. Галилеевы спутники Юпитера

Это единственная подсистема Солнечной системы, стимулировавшая благосклонное отношение небесных механиков к резонансу.

Резонанс был обнаружен /Tisserand, 1866/ /8/ еще Лапласом (1789) в форме дополнительного первого интеграла

$$\varphi_1 - 3\varphi_2 + 2\varphi_3 \approx \pi, \qquad (1)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – планетоцентрические долготы спутников Ио, Европы и Ганимеда. Этот резонанс долгое время был исключительным и в другом смысле. Только он связывал воедино три тела, а не два, как во всех остальных случаях. Форма записи этого замечательного соотношения уже предвещает правильную форму резонанса

$$\omega_1 - 3\omega_2 + 2\omega_3 \approx 0 \qquad (2)$$

как целочисленного линейного уравнения для частот, а не для периодов, как обычно записывают парные резонансы.

е. Луна

Вдохновляющий пример резонансного движения демонстрирует наш единственный естественный спутник – Луна. Это тоже "прима" – унисон 1:1 – как и в случае троянцев, но уже вращения с обращением.

Джордж Дарвин (1907) /9/, сын знаменитого Чарлза Дарвина, был, по-видимому, первым, кто попытался эволюционно проследить возникновение резонансной структуры.

Он правильно указал главный фактор эволюции системы Луна–Земля – приливные силы. К сожалению, неверна, как показал Ляпунов (1882) /10/, исходная гипотеза Пуанкаре об устойчивости грушевидной фигуры вращения жидкой массы. Поэтому теория Д.Дарвина неприменима даже к вопросу о происхождении двойных звезд, не говоря уже о системе Луна–Земля, для которой наиболее вероятно /Шмидт, 1962/ /14/ происхождение из газо-пылевого облака.

ж. Солнечная активность

"Солнце менее полезно, чем Луна, ибо светит днем /Прутков, 1855/ /11/, когда и без него светло, а Луна ночью". Кроме того, на Солнце есть пятна. Однако именно солнечные пятна проливают дополнительный свет на проблему возникновения резонансных структур.

Средняя периодичность /Wolf, 1862/ /12/ солнечной активности подозрительно близка к периоду обращения Юпитера. Аристарх Аполлонович Белопольский (1886) /13/ попытался усмотреть в этом факте причинную связь. Мысль эта, понимаемая буквально, несомненно, неверна, так как солнечная активность не является однопериодическим процессом. Однако открытым остается вопрос, нельзя ли связать солнечную активность с приливным воздействием обеих главных планет – Юпитера и Сатурна.

Независимо от справедливости этой двухчастотной модели пятна на Солнце пополняют нашу коллекцию нетривиальным точным резонансом 1:2 ("октава") магнитных и механических явлений, ибо надежно установлено, что полярность пятен меняется на противоположную в соседних циклах.

з. Планетные расстояния или частоты?

Эмпирическое правило /Nieto, 1970/ планетных расстояний Тициуса (1766) – Боде (1772) положило начало пониманию Солнечной системы как единого целого. Это правило было пересмотрено Отто Юльевичем Шмидтом (1946) с эволюционных позиций. Однако основой рассмотрения оставались планетные расстояния.

Автор настоящей статьи попытался /Молчанов, 1966/ /15/ применить к Солнечной системе идеи нелинейной теории колебаний. Такой подход вынуждал рассматривать частоты (а не большие полуоси) в качестве основных характеристик движения. Обнаружилось, что частоты планет имеют максимально возможный набор резонансных соотношений. Неосторожно высказанная заветная мысль (восходящая к Четаеву (1929) /16/, как потом выяснилось*) о "квантованности" Солнечной системы, "целочисленности" ее структурного принципа вызвала дружное негодование и астрономов, и физиков: "Случайность!" – возмущаются первые /Backus, 1969; Henon, 1969; Dermott, 1969/ /17-19/. "А что играет роль постоянной Планка?" – обличают вторые.

Гипотеза максимальной резонансности, высказанная в цитированной работе /Молчанов, 1966/ /15/, может, конечно, оказаться неверной. Однако она полезна самой постановкой вопроса о судьбе любой колебательной системы, эволюционирующей под воздействием слабых диссипативных факторов. Единство подхода к резонансам вращения и обращения выгодно отличает эту гипотезу от любой модификации "правила планетных расстояний".

и. Спин-орбитальное взаимодействие

Развитие наблюдательных средств (прежде всего радиолокационной техники) позволило обнаружить новые типы резонансов. Так, у Меркурия был найден /Colombo, 1965/ /20/ резонанс 2:3 ("квинта") вращения с обращением. Прошло немного времени, и наблюдения выявили удивительный сложный резонанс /Goldreich, Peal, 1966/ /21-23/ вращения Венеры вокруг оси с обращением Земли и Венеры вокруг Солнца. В

---

* Molchanov (1969) /32/.

результате этого резонанса Венера оказывается похожей на Луну – в моменты наибольшего сближения Венера почтительно смотрит на Землю. Впрочем, в реальности этого резонанса сомневается ныне даже один из авторов / Goldreich, 1970/. Хороший пример колебательности постижения истины!

к. Ориентация искусственных спутников Земли

Большое разнообразие задач, выполняемых спутниками, делает практически важным систематическое изучение достаточно широкого класса резонансов вращения с обращением – так называемых номинальных движений /Белецкий, 1965/. Особенно важны, конечно, классические движения лунного (или меркурианского) типа для связных, метеорологических и геодезических спутников.

Но если в "академических" вопросах дело природы позаботиться об устойчивости резонансного движения, то в инженерных вопросах "диссипативный фактор" приходится "загружать на борт спутника" в форме той или иной системы активной стабилизации.

В настоящее время имеется обширная литература /Торжевский, 1969/, посвященная изучению этого круга вопросов.

АКСИОМАТИКА НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Небесная механика за неполных три века существования блестяще справилась со своей задачей – задачей объяснения видимого движения небесных тел. Субботин (1955) /24/ с законной гордостью писал: "В 1950 г. удалось показать, что закон всемирного тяготения позволяет представить наблюдения (с 1780 по 1940) пяти планет Юпитеровой группы (Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон) со всей той точностью, которую имеют эти наблюдения". В движении планет Земной группы (Меркурий, Венера, Земля и Марс) – главная невязка – знаменитое годичное перемещение перигелия Меркурия 5,75 секунды дуги вместо теоретического 5,34 секунды дуги – была объяснена Эйнштейном (1915) на основе релятивистского уточнения закона всемирного тяготения. Другие невязки, несравненно более мелкие, устранены после открытия Де Ситтером и Спенсером Джонсом (1926) неравномерности вращения Земли /Идельсон, 1940; Парийский, 1945/ /25, 26/.

Небесная механика вслед за геометрией стала чисто аксиоматической наукой – таков важнейший методологический результат истории ее развития. Система аксиом небесной механики значительно проще системы аксиом геометрии и записывается тремя строчками уравнений движения:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$
$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{3}$$
$$H(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m_i} + \sum_{i \neq k}\sum \gamma \frac{m_i m_k}{|q_i - q_k|} .$$

Построение аксиоматики любого явления неминуемо ставит вопрос о границах применимости математической модели. В небесной механике этот вопрос (имеющий специфическую форму проблемы устойчивости планетной системы) испокон веку стоял драматически остро. Даже для Ньютона и Эйлера, не говоря уже о Галилее, он был прямо связан с проблемой бытия божия. Постепенно теологический накал остывал, время от времени давая знать острыми вспышками уже чисто научных споров, что под слоем пепла еще таится пламя.

Между тем шло успешное исследование математической модели – теории возмущений гамильтоновых систем. Андрей Николаевич Колмогоров (1954) предложил замечательную модификацию итерационного метода Ньютона для доказательства гипотезы об устойчивости многочастотных колебаний относительно гамильтоновых возмущений. Понимаемая буквально, эта гипотеза неверна. Максимально возможное продвижение на этом пути, по-видимому, содержит теорема Арнольда (1961). По его собственным словам она "есть метрический аналог "теоремы" Лапласа об устойчивости планетной системы". И далее: "... исключительное множество начальных данных хотя и имеет малую меру, все же всюду плотно связано и простирается в бесконечность. Движение при исключительных начальных условиях нужно еще исследовать; a priori оно может оказаться осциллирующим или даже уходящим в бесконечность" /29/.

Эти исследования завершают, в существенном, внутреннее изучение свойств математической модели и позволяют тем самым поставить кардинальный вопрос о том, насколько сама модель соответствует изучаемому объекту – реальной планетной системе.

Точка зрения автора настоящей статьи состоит в следующем.

<u>Классическая небесная механика правильно моделирует поведение реальной планетной системы на малых масштабах времени (сотни тысяч-миллионы лет).</u>

<u>Однако во всех эволюционных вопросах (миллиарды лет) и особенно в вопросе о структуре планетной системы гамильтоново приближение недостаточно и дает искаженное представление о свойствах реальной Солнечной системы.</u>

КОНСЕРВАТИВНЫЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ ФАКТОРЫ

Некритическое перенесение свойств математической модели на свойства реального объекта является методологической ошибкой. На эту ошибку, в частности (насколько известно автору), указывал Колмогоров как раз по поводу связи его гипотезы с поведением реальной планетной системы на больших временах.

Это общее соображение допускает в интересующем нас случае более точную формулировку.

Рассмотрим систему уравнений с двумя малыми параметрами ε и δ:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} + \delta A \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} + \delta B \end{cases}, \qquad (4)$$

гамильтонову в главном члене и "дважды возмущенную". Одно возмущение – чисто гамильтоново, консервативное – задается малой поправкой εh к основному гамильтониану H невозмущенной системы

$$\mathcal{H}(p,q) = H(p,q) + \varepsilon h(p,q). \qquad (5)$$

Другое возмущение, значительно меньшее по абсолютной величине

$$\delta \ll \varepsilon \ll 1, \qquad (6)$$

задает неконсервативные поправки δA и δB, описывающие как потерю энергии (или массы) системой, так и подкачку их в систему.

Отбросим сначала сверхмалые ($\delta \ll \varepsilon$) диссипативные факторы. В математической модели это равносильно предельному переходу $\delta \to 0$. Получится новая, полностью гамильтонова система:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \qquad (7)$$

$$\mathcal{H}(x,y) = H(x,y) + \varepsilon h(x,y).$$

Предметом теории возмущений гамильтоновых систем являются именно такие системы. Ясно, что существует немало вопросов, в которых законно пренебрежение диссипативными факторами. К ним, несомненно, относятся эфемеридные задачи. К сожалению, наиболее содержательные (и трудные) результаты, касающиеся поведения гамильтоновых систем при $t \longrightarrow \infty$, как раз и не могут быть перенесены на системы общего вида. Нетрудно показать, что система (7) дает хорошую аппроксимацию поведения общей системы (4) на "предрелаксационных" временах

$$t \ll \frac{t_0}{\delta} \qquad (8)$$

(t_0 – основной период гамильтоновой системы, например период обращения Юпитера вокруг Солнца) и совершенно непригодна именно на больших интервалах времени

$$t \gg \frac{t_0}{\delta}\,. \qquad (9)$$

Таким образом, разумная область применимости гамильтоновой теории возмущений ограничена и сверху и снизу:

$$\frac{t_0}{\varepsilon} \lessapprox t \lessapprox \frac{t_0}{\delta}\,. \qquad (10)$$

На интервалах времени, много меньших, еще не имеет смысла учитывать ε-возмущение, а на временах, много больших, уже нельзя пренебрегать δ-возмущением.

ПРИМЕР СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Особенно прозрачно взаимоотношение ε-систем и δ-систем на плоскости (одна степень свободы). Гамильтониан $\mathcal{H}$ является первым интегралом ε-системы

$$\mathcal{H}(p,q) = const \qquad (11)$$

в пространстве любой размерности. Однако плоскость существенно проще. Для нее знание первого интеграла полностью определяет геометрию системы – семейство интегральных кривых

$$H(p,q) + \varepsilon h(p,q) = const \qquad (12)$$

Эта формула показывает, что на плоскости гамильтоново возмущение лишь немного искажает форму регулярной траектории.

Изображающая точка подобной системы будет вечно двигаться по замкнутой траектории (12), мало отличающейся от замкнутой траектории

$$H(p,q) = const \qquad (13)$$

невозмущенной системы.

Совершенно иначе ведут себя траектории δ-систем. Главной отличительной особенностью этих систем является появление избранных траекторий – предельных циклов, на которые наматываются (как снаружи, так и изнутри) все остальные траектории. Сильно модернизируя оригинальные исследования Пуанкаре (1902) и следуя идеям Ван дер Поля (1927), напишем уравнение для гамильтониана $\mathcal{H}$ в силу полной системы

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \delta\left(A\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} + B\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q}\right). \qquad (14)$$

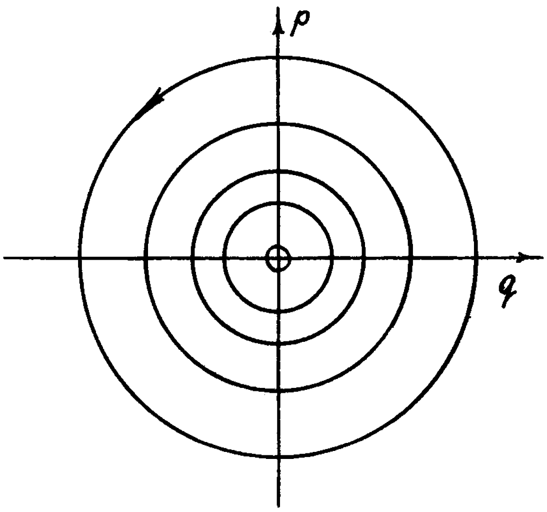

Рис. 1. Линии уровня (окружности) полной энергии $H = \frac{p^2 + q^2}{2} = E$ гармонического осциллятора.

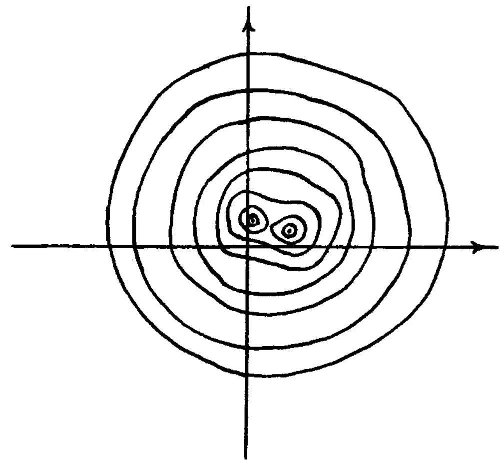

Рис. 2. Возможное искажение траекторий при гамильтоновом возмущении. Вблизи положения равновесия картина может меняться качественно, а не только количественно.

Отбрасывая в правой части члены, осциллирующие при движении по невозмущенной траектории, получим новое уравнение:

$$\frac{dE}{dt} = \delta f(E), \qquad (15)$$

правая часть которого есть просто среднее от правой части точного уравнения по быстрой переменной (фазе). Крылов и Боголюбов (1937) показали, что переход от уравнения для $\mathcal{H}$ к уравнению для E может быть осуществлен при помощи замены переменных

$$\mathcal{H} = E + \delta \mathcal{F}(E, \varphi, \delta), \qquad (16)$$

исключающей быструю фазу из медленного уравнения для $\mathcal{H}$. "Эволюционное" уравнение для E определяет амплитуды (точнее "энергии") предельных циклов (устойчивых и неустойчивых) полной δ-системы:

$$f(E) = 0. \qquad (17)$$

Они совпадают со стационарными точками эволюционного уравнения.

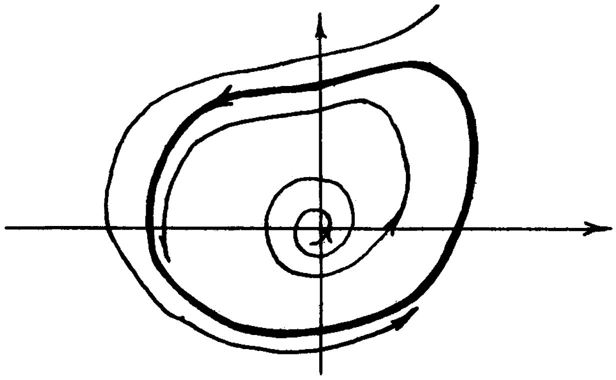

Рис. 3. Возникновение предельного цикла при неконсервативном возмущении. Роль δ-факторов.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ПОДХОД

Несмотря на столь явно качественное различие в асимптотической структуре решений, обнаружить разницу в поведении δ- и гамильтоновой систем крайне трудно и, вероятнее всего, даже невозможно. Это можно понять, если ориентировочно оценить характерные времена в реальной Солнечной системе.

Основной временной масштаб Солнечной системы задается главной колебательной компонентой – обращением Юпитера вокруг Солнца. Для наших целей достаточны оценки порядка величин. Полагаем поэтому

$$T_{♃} \sim 10 \text{ лет.} \tag{18}$$

Основной малый параметр Солнечной системы, характеризующий взаимодействие планет друг с другом, имеет порядок отношения массы всех планет к массе Солнца, то есть величину порядка одной тысячной. Следовательно,

$$T_{\varepsilon} \sim 10^4 \text{ лет.} \tag{19}$$

Диссипативные факторы оцениваются очень ненадежно. Ясно только, что речь идет о величинах (безразмерных) порядка одной миллионной или даже меньше. Поэтому

$$T_{\delta} \sim 10^7 \div 10^9 \text{ лет.} \tag{20}$$

Все время существования Солнечной системы оценивается /Уиппл, 1948/ величиной в несколько миллиардов лет

$$T \sim 5 \cdot 10^9 \text{ лет.} \tag{21}$$

Из независимых источников (геологических, исследований метеоритов, космических) известно /Левин, 1960/ /34/, что диссипативные факторы отнюдь не были столь малыми в ту эпоху, так от нас отдаленную. Подобные соображения подтверждают разумность оценки для T_{δ}, во всяком случае ее верхнего предела.

Столь грандиозные различия во временах T_{ε} и T_{δ} объясняют трудность наблюдательного "уловления" диссипативных факторов. Сколько-нибудь надежные наблюдательные данные имеются /Субботин, 1937/ на космогонически ничтожном отрезке времени – менее двух десятков оборотов Юпитера вокруг Солнца. Диссипативный сдвиг элементов любой орбиты лежит поэтому за пределами наблюдательной точности.

Тем не менее имеется принципиальное отличие ε- и δ-систем, позволяющее, по мнению автора, определенно предпочесть δ-модель для понимания современной структуры Солнечной системы. Главный довод – обилие резонансных явлений и процессов в реальной Солнечной системе. Резонансы непонятны и противоестественны ("случайны", расположены на "множестве меры нуль") в гамильтоновых системах. В диссипативных же системах резонансы не только естественны, но и неизбежны /Molchanov, 1968/.

ГИПОТЕЗА КОЛМОГОРОВА И ТЕОРЕМА АРНОЛЬДА

В настоящее время не существует (на математическом уровне строгости) теории резонансов в нелинейных колебательных системах. Это, однако, не означает, что невозможно исследование резонансных явлений "на физическом уровне строгости". При таком подходе отбрасывают /Паули, 1956/ /27/ мешающие члены (уверяя себя и других, что это делается из физических соображений*, и что отброшенные члены несущественны), после чего оставшиеся изучают.

На следующем этапе удается обычно обнаружить надлежащий малый параметр и построить формальное разложение, главный член которого совпадает с "физической" моделью. Разложение, как правило, оказывается расходящимся.

С этого момента задача становится чисто математической. Обоснование асимптотического разложения состоит в построении итерационного процесса, обладающего двумя свойствами:

1) сходимость при некоторых условиях (например, на множестве достаточно большой меры);

2) совпадение асимптотического ряда с формальным разложением итерации. ("Достаточно большого" отрезка разложения, "достаточно далекой" итерации с "достаточно большим" отрезком асимптотического ряда).

История науки показала /Харди, 1951/ /28/ высокую эффективность подобного "эстафетного" метода исследований. Нет оснований пренебрегать им и в интересующей нас задаче. Построение асимптотического разложения, не говоря уже об итерационном процессе, выходит за рамки статьи. Но даже определение главного члена и его исследование - вполне содержательная и непростая задача.

Выкладки удобнее проводить, выбрав в качестве независимых переменных первые интегралы и фазы невозмущенной системы:

$$\begin{cases} \mathcal{J} = \mathcal{J}(p, q) \\ \varphi = \varphi(p,q). \end{cases} \tag{22}$$

Во вполне интегрируемых гамильтоновых системах можно /Арнольд, 1963/ /29/ выбрать переменные так, что в надлежащей системе координат

$$\begin{cases} \mathcal{J} = p \\ \varphi = q\,. \end{cases} \tag{23}$$

В этих переменных система приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(\mathcal{J}) + \varepsilon\omega_1(\mathcal{J},\varphi) + \delta\omega_2(\mathcal{J},\varphi); \\ \frac{d\mathcal{J}}{dt} &= \qquad\quad \varepsilon f_1(\mathcal{J},\varphi) + \delta f_2(\mathcal{J},\varphi). \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_\ell)$ - быстрые (или фазовые) переменные, а $\mathcal{J} = (\mathcal{J}_1,\dots,\mathcal{J}_m)$ - медленные переменные. Правые части периодичны по каждой фазе с периодом 2π. Весь дальнейший анализ основан только на выписанной форме системы и не зависит от ее происхождения. В частности, при $\delta = 0$ система не обязательно обращается в гамильтонову. Однако различие между f_1 и f_2 следует сохранить. Оно состоит в том, что среднее по фазам от f_1 равно нулю

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f_1(\mathcal{J}; \varphi_1,\dots,\varphi_\ell)\, d\varphi_1 \dots d\varphi_\ell = 0. \tag{25}$$

В гамильтоновых системах это условие выполнено автоматически.

---

* Этот "блистательный" пример физической "интуиции" обнаружен И.М.Гельфандом. Математик был бы вынужден довольствоваться "чисто формальным" соображением, что квадратное уравнение $p^2 - p = 0$ имеет только два корня $p = 1$, $p = 0$.

Рассмотрим невозмущенную ($\varepsilon = 0$, $\delta = 0$) систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega(\mathcal{J}) \\ \dfrac{d\mathcal{J}}{dt} = 0 . \end{cases} \tag{26}$$

Медленные переменные "остановились"

$$\mathcal{J}_K(t) = const, \tag{27}$$

а быстрые совершают условно-периодическое движение

$$\varphi_i(t) = \omega_i t + \varphi_{io} . \tag{28}$$

Каждой точке $\mathcal{J} = \{\mathcal{J}_k\}$ m-мерного пространства медленных переменных $\mathcal{J}$ соответствует ℓ-мерный тор пространства быстрых переменных φ, движение по которому происходит со скоростями, определенными вектором частот

$$\omega = \{\omega_i\} = \omega(\mathcal{J}). \tag{29}$$

Гипотеза Колмогорова, доказанная Арнольдом в 1963 г., состоит в том, что гамильтоново возмущение (члены с ε) немного искажает этот тор, не меняя существенно характера движения. Однако доказательство Арнольда справедливо только для точек общего положения в пространстве $\mathcal{J}$. Это, в частности, означает, что из рассмотрения исключаются все точки, лежащие на резонансных поверхностях пространства $\mathcal{J}$. Каждая такая поверхность определяется целочисленным вектором резонанса $(n_1, n_2, \ldots, n_\ell)$:

$$(n, \omega) \equiv n_1\omega_1(\mathcal{J}) + n_2\omega_2(\mathcal{J}) + \ldots + n_\ell\omega_\ell(\mathcal{J}) = 0. \tag{30}$$

Покажем, что вблизи резонансной поверхности возникает резонансная зона, внутри которой движение (даже при чисто гамильтоновом возмущении) существенно отличается от движения, предсказываемого гипотезой Колмогорова.

"ПОЛУБЫСТРЫЕ" ПЕРЕМЕННЫЕ

Введем новые переменные: резонансную фазу ψ

$$\Psi = n_1\varphi_1 + \ldots + n_\ell\varphi_\ell \tag{31}$$

и резонансную частоту ν

$$\nu = n_1\omega_1(\mathcal{J}) + \ldots + n_\ell\omega_\ell(\mathcal{J}). \tag{32}$$

Эти переменные можно дополнить / Molchanov, 1968/ /32/ новыми быстрыми фазами θ и новыми медленными переменными K так, чтобы возникла замена переменных, в результате которой система приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \omega(\nu, K) + \varepsilon\omega_1(\theta, \psi, \nu, k) + \delta\omega_2(\theta, \psi, \nu, k); \\ \frac{d\psi}{dt} &= \nu + \varepsilon\nu_1(\theta, \psi, \nu, k) + \delta\nu_2(\theta, \psi, \nu, k); \\ \frac{d\nu}{dt} &= \varepsilon g_1(\theta, \varphi, \nu, k) + \delta g_2(\theta, \psi, \nu, k); \end{aligned} \tag{33}$$

$$\frac{dk}{dt} = \varepsilon \mathcal{L}_1(\theta,\varphi,\nu,k) + \delta \mathcal{L}_2(\theta,\varphi,\nu,k). \tag{33}$$

Изучаемая резонансная поверхность имеет в новых переменных простое уравнение

$$\nu = 0. \tag{34}$$

Поэтому как раз вблизи резонансной поверхности резонансная фаза φ перестает быть быстрой переменной. Вид системы (33) подсказывает идею "выравнивающей" замены переменных*

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\nu, \tag{35}$$

которая "выщепляет" пару "полубыстрых" переменных φ и μ. Вдали от резонанса эта пара распадается на быструю фазу φ и медленную частоту ν.

Это преобразование, в свою очередь, обнаруживает существование "полубыстрого" времени τ

$$\tau = \sqrt{\varepsilon}\, t, \tag{36}$$

характерного для резонансных эффектов.

В результате в системе выделяются три группы уравнений. Группа из $(\ell-1)$-уравнения для быстрых фаз θ, основная группа из двух уравнений для резонансных переменных φ и μ и, наконец, группа из $(m-1)$-уравнения для медленных переменных k:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta}{d\tau} &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\omega(k,\sqrt{\varepsilon}\mu) + \sqrt{\varepsilon}\,\omega_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\,\omega_2;\\
\frac{d\varphi}{dt} &= \mu + \sqrt{\varepsilon}\,\nu_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\,\nu_2;\\
\frac{d\mu}{dt} &= g_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\,g_2;\\
\frac{dk}{dt} &= \sqrt{\varepsilon}\,G_1 + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\,G_2.
\end{aligned} \tag{37}$$

ИСКЛЮЧЕНИЕ БЫСТРЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Следующий шаг - главный во всей программе исследования резонансов. Он состоит в исключении быстрых переменных θ из системы и переходе к изучению эволюционной системы для медленных переменных K и резонансных φ, μ:

---

*Важно отметить, что любые варианты разложений в ряды по малому параметру не могут "выловить" резонансную зону. Это видно из того, что в формулы входит корень из ε. Следовательно (с формальной точки зрения), мы имеем дело с "ветвлением" по комплексному переменному ε.

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \mu + \sqrt{\varepsilon}\, a_1(\varphi, \kappa) + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\, a_2(\varphi, \mu, \kappa) + \ldots$$

$$\frac{d\mu}{d\tau} = b(\varphi, \kappa) + \sqrt{\varepsilon}\, b_1(\varphi, \kappa)\mu + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\, b_2(\varphi, \mu, \kappa) + \ldots \qquad (38)$$

$$\frac{d\kappa}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon}\, \mathcal{F}_1(\varphi, \kappa) + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\, \mathcal{F}_2(\varphi, \mu, \kappa) + \ldots$$

Именно этот решающий переход и невозможен в настоящее время на математическом уровне строгости. В свое время автор попытался сформулировать теорему о разделении быстрых и медленных движений. К сожалению, формулировка теоремы /Молчанов, 1963/ ошибочна. Автор грустно благодарен Арнольду /33/, заметившему это обстоятельство. Можно предположить, что разделение движений все же имеет место, но не всюду, а на множестве асимптотически (при $\varepsilon \to 0$) полной меры. Однако в настоящее время не существует даже точной формулировки, не говоря уже о доказательстве подобной теоремы. Удовльствуемся поэтому переходом к эволюционной системе на "физическом уровне строгости". Некоторым утешением могут служить следующие соображения: во-первых, поставлена хорошая математическая задача; во-вторых, "не пропадет наш скорбный труд", так как будущее обоснование все равно будет опираться на свойства эволюционной системы; в-третьих, подобные ситуации уже случались. Так, например, Ван дер Поль /1927/ изучал хорошие физические задачи еще не обоснованным строго методом.

Все дальнейшие выводы о свойствах общих колебательных систем имеют поэтому эвристический смысл. Строгими эти исследования станут только после строгого доказательства теоремы о замене переменных.

Однако в частных случаях переход к эволюционной системе может быть обоснован частными методами. Так, например, быстрые переменные могут "по своей доброй воле" не войти в эволюционную систему и тем самым избавят нас от забот. Необходимость уточнения гипотезы Колмогорова вытекает, к слову сказать, из рассмотрения как раз такого примера:

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \varepsilon W(q_1 - q_2). \qquad (39)$$

Гамильтониан этой системы с двумя степенями свободы определяется потенциалом взаимодействия W, который является произвольной функцией, четной и периодической, своего аргумента – разности q_1 и q_2. Нетрудно проверить, что для этой системы переход к новым переменным полностью решает вопрос. Эволюционные уравнения не содержат быстрой фазы. Быстрая же фаза может быть потом "доинтегрирована" на каждой эволюционной траектории.

"О МЕХАНИЦИЗМЕ"

Рассмотрения этого пункта носят, как уже подчеркивалось, эвристический характер и не претендуют на какую-либо строгость. Полезно, однако, наметить план исследования и угадать общие контуры результата перед тем, как приступать (в других, конечно, работах) к трудным и громоздким точным доказательствам.

Итак, исследуем систему (38), положив, конечно, $\varepsilon = 0$ и тем более $\delta = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\tau} = \mu, \\ \dfrac{d\mu}{d\tau} = b(\varphi, k), \\ \dfrac{d\kappa}{d\tau} = 0. \end{cases} \tag{40}$$

Полученная система обладает весьма примечательными свойствами.
Во-первых, на рассматриваемых временах

$$\tau \sim 1, \qquad t \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \ll \frac{1}{\varepsilon} \tag{41}$$

все медленные переменные K являются первыми интегралами:

$$K = K_0 = const. \tag{42}$$

Во-вторых, пара "полубыстрых" переменных μ и φ удовлетворяет уравнению "механического" типа, что проявляется наиболее отчетливо, если исключить μ

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - b(\varphi, \kappa) = 0. \tag{43}$$

Из этого факта вытекает вывод высокой общности и значения.

Структура резонансной зоны всегда описывается ньютоновской механикой независимо от происхождения системы.

Исходная система могла быть биохимической или описывать поведение какого-нибудь экономического объекта, могла возникнуть при изучении поведения плазмы в фотосфере звезды или в задаче популяционной генетики. Все это не имеет значения. Если только в системе имеются быстрые и медленные переменные, если только в системе имеются многочастотные колебания, кинетика самых интересных, самых, если можно так выразиться, "интимных" процессов неминуемо оказывается механической по типу протекания во времени.

Более того, она оказывается ньютоновской в самом узком смысле этого слова. Уравнение (43) формально совпадает с одномерным движением материальной точки в потенциальном поле, задаваемым потенциалом $U(\varphi, \kappa)$:

$$U = -\int b(\varphi, \kappa)\, d\varphi. \tag{44}$$

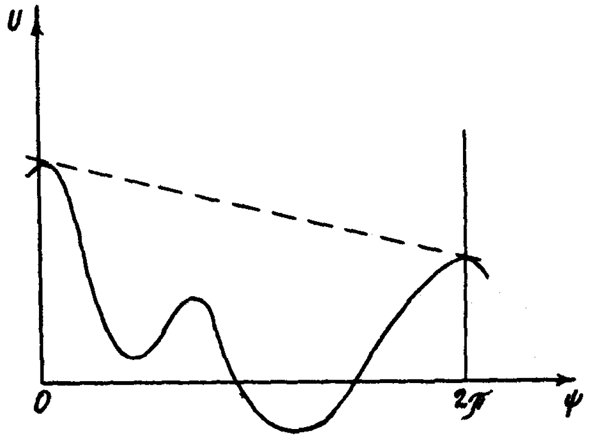

Рис. 4. Обобщенный потенциал U резонансного движения. Функция U оказывается периодичной по резонансной фазе φ, если исходная система – гамильтонова. В общем случае U есть сумма линейной и периодической функций.

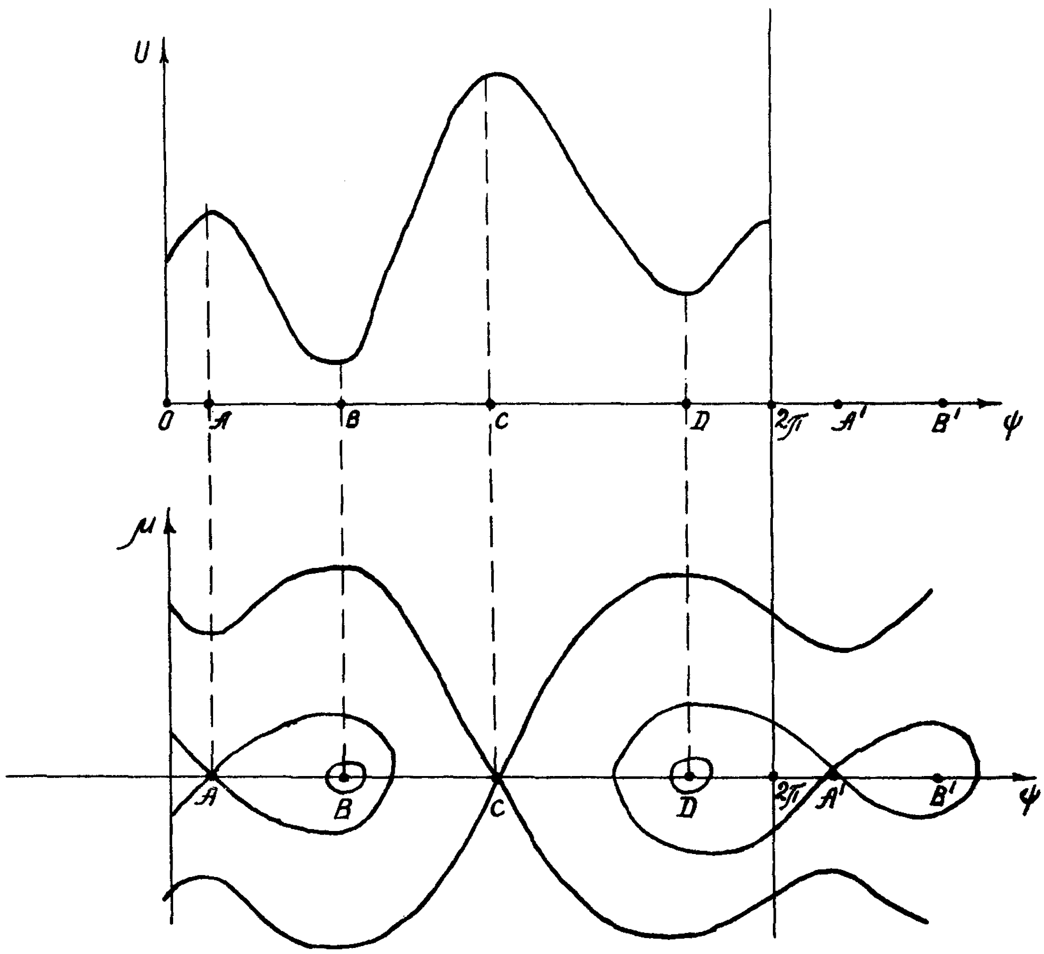

Рис. 5. Стандартное построение фазового портрета механической системы, адекватной изучаемому резонансу. Точки A', B' физически (или "биохимически") совпадают с точками A, B, соответственно, и приведены только для наглядности построения. Истинный фазовый портрет расположен на цилиндре, получающемся сворачиванием полосы шириной 2π, вырезанной из плоскости (μ, ψ).

Эти рассуждения можно воспринимать как объяснение столь долгого господства "механицизма". Необходимо, однако, подчеркнуть и решающее отличие развиваемого подхода от традиционного "механицизма".

Прежде всего, этот "механицизм" "кинетический". Обычно под "механицизмом" понимают "механицизм" морфологический" – утверждение, что все сущее устроено из рычагов, пружинок или, в крайнем случае, является упругой средой (эфиром) с удивительными механическими свойствами.

Здесь же утверждается нечто противоположное и, на взгляд автора, существенно более глубокое.

Независимо от исходной структуры, от морфологии механическими будут исторические, временные, эволюционные свойства любой системы – ее "поведение", кинетика, кинематика в наиболее интересных критических поворотных пунктах ее развития – в резонансных ситуациях.

Эта идея перекликается с мечтой А.Эддингтона, высказанной около полустолетия назад: "Задача науки – объяснить основные свойства мира не из того, что он устроен именно таким образом, а из того, что он устроен хоть как-нибудь".

Мы видим, что в одном частном случае эта любопытная программа оказывается реальной. Кроме того, приведенные соображения существенно повышают ценность и значение идей и методов, накопленных в механике и математике (теории колебаний).

Эти исследования оказываются относящимися не только к сравнительно узкому кругу чисто механических систем.

При надлежащем анализе оказывается возможным в значительно более широком классе систем (в том числе в биологических) выделить ведущие, существенные переменные. После этого замечательным образом оказывается, что соответствующие математические модели уже давно и детально изучены и пыльные архивы механических журналов обретают новую жизнь. В свою очередь, математическое моделирование в биологии оказывается основанным на прочном, надежном фундаменте математического естествознания.

Таков полезный методологический урок, который можно извлечь из сравнительно узкой темы - исследования резонансных движений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Newton Isaac. Opera quae existant omnia, v. 1-5. Liondini, 1779-1885. Рус. пер.: Математические начала натуральной философии. Пер. с лат. с прим. и поясн. А.Н.Крылова. В кн.: „А.Н.Крылов. Собр. трудов", т. 7. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1936.
2. Tisserand F. Traite de mecanique ce'leste, v. 1. Paris, 1866.
3. Субботин М.Ф. Курс небесной механики, т. 2. М.-Л., 1937.
4. Путилин И.И. Малые планеты. М., Гостехиздат, 1953.
5. Самойлова-Яхонтова Н.С., Успехи астрономич. наук, 5 (1950).
6. Ватсон Ф. Между планетами. Пер. с англ. Б.Ю. Левина. М.-Л., Гостехиздат, 1947, стр. 23.
7. Уиппл Ф. Земля, Луна и планеты. М.-Л., Гостехиздат, 1948, стр. 35, 230.
8. Tisserand F., Loco cit., v. IY, p. 83.
9. Darwin G.H. Scientific papers, v. 1-5. Cambridge, 1907-1916. Рус. пер.: Приливы и родственные им явления в Солнечной системе . Пер. с англ. В.В.Серафимовича. М.-Пг., Госиздат, 1923, стр. 282.
10. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. соч., т. 2. М.-Л., 1956.
11. Козьма Прутков. В кн.: "Полн. собр. соч." (Б-ка поэта. Большая серия), М., Изд-во АН СССР, 1954-1965.
12. Wolf R. Über die elfjahrige Periode in den Sonnenflechen und erdmagnetischen Variationen. In: "Annalen der Physik und Chemie". Lpz., Bd. 193, 1862, S. 11.
13. Белопольский А.А. Пятна на Солнце и их движение. Магист. дисс. М., Университетск. тип., 1886.
14. Шмидт О.Ю. Происхождение Земли и планет. М., Изд-во АН СССР, 1962.
15. Молчанов А.М., ДАН СССР, 168, 2 (1966).
16. Четаев Н.Г. В сб.: "Ученые записки Казанского ун-та", 1931.
17. Backus G.E. Critique of "The Resonant Structure the Solar System" by A.M. Molchanov, Icarus, 11, 88 (1969).
18. Dermott S.F., On the origin of commensurabities in the Solar System. Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 142, 143 (1969).
19. Henon M., Icarus, 11 (1969).
20. Colombo G., Nature, 208, 575 (1965).
21. Goldreich P., Nature, 209, 1078 (1966).
22. Peal S.S., Ann. Rev. Astronomic and Astrophysic, 6, 287 (1968).
23. Peal S.S., Palo Alto. Cal. USA, 1966.

24. Субботин М.Ф. В кн.: "Большая Советская Энциклопедия", т. 2, 2-е изд. М., Госнаучиздат, 1955, стр. 328.
25. Парийский Н.Н., Астрономич. ж., 22, 2 (1945).
26. Идельсон Н.И. В кн.: "Астрономический ежегодник СССР на 1941 год". М.-Л., Изд-во АН СССР, 1940.
27. Паули В. Общие принципы волновой механики. М., Гостехиздат, 1947, стр. 121.
28. Харди Г.Г. Расходящиеся ряды. Пер. с англ. Д.А.Райкова. С предисл. и обз. ст. С.Б.Стечкина. М., ИЛ., 1951.
29. Арнольд В.И., Успехи математ. наук, 18, 6, 91 (1963).
30. Борн М. Лекции по атомной механике. т. 1, Харьков-Киев, Гостехиздат УССР, 1934.
31. Биркгоф Д.Д. Динамические системы. Пер. с англ. Е.М.Левинсона. М.-Л., Гостехиздат, 1941.
32. Molchanov A.M., Icarus, 8, 203 (1968).
33. Арнольд В.И., ДАН СССР, 161, 1, 9 (1965).
34. Левин Б.Ю., Изв. АН СССР, сер. физика земли, 7 (1972).

СОДЕРЖАНИЕ

Альберт Макарьевич Молчанов

ГИПОТЕЗА РЕЗОНАНСНОЙ СТРУКТУРЫ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Отредактировано и подготовлено к печати в Отделе
научно-технической информации

Редактор Г.П.Медведева

Т-18780. Подписано в печать 12/XI-1974 г. Уч.-изд. л. 2.2
Тираж 250 экз. Заказ 2181Р.

Отпечатано на ротапринте в ОНТИ Научного центра биологических исследований АН СССР в Пущине.